LIMIT

PENGERTIAN

Perhatikan fungsi berikut : $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Fungsi tersebut tidak terdefinisi pada x = 1 karena di titik $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$. Tetapi kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi pada $f(x)$ bilamana x mendekati 1. Apakah $f(x)$ menempati bilangan tertentu jika x mendekati 1 ?

Untuk mengetahui hal tersebut bisa kita lihat tabel berikut.

X	y = $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1,25	3,813
1,1	3,310
1,01	3,030
1,001	3,003
↓	↓
1,000	?
↑	↑
0,999	2,997
0,99	2,970
0,9	2,710
O,75	2,313

Berdasarkan tabel didapatkan informasi bahwa $f(x)$ mendekati 3 saat x mendekati 1. Dalam lambang matematis kita tuliskan :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Dibaca " limit $(x^3 - 1 / x - 1)$ untuk x mendekati 1 adalah 3"

Atau dengan cara lain dengan menggunakan aljabar kita dapat menggunakan pemfaktoran yaitu :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) \\
&= 1^2 + 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Perhatikan (x - 1)/(x - 1) = 1 selama x $\neq$ 1

Definisi Limit

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x mendekati tetapi berlainan dari c, maka $f(x)$ dekat ke L.

Contoh :

1. Carilah $\lim_{x \to 3} (4x - 5)$

   Penyelesaian :

   Bilamana x mendekati 3 maka 4x – 5 mendekati 4.3 – 5 = 7. dapat kita tuliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

2. Carilah $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x + 2)$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5$$

3. Carilah $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$

4. Carilah $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

x	$\frac{\sin x}{x}$
1,0	0,84147
0,5	0,95885
0,1	0,99833
0,01	0,99998
↓	↓
0	?
↑	↑
- 0,01	0,99998
- 0,1	0,99833
- 0,5	0,95885
- 1,0	0,84147

5. Carilah $\lim_{x \to 0} \left[x^2 - \frac{\cos x}{10.000}\right]$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 - \frac{\cos x}{10.000}\right] = 0^2 - \frac{1}{10.000}$$

$$= - \frac{1}{10.000}$$

6. Carilah $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

Penyelesaian :

dalam kasus ini tidak ada nilainya

x	$\sin \frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	-1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	-1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	-1
$2/(12\pi)$	0
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

Definisi Limit Kiri dan Limit Kanan

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \mathrm{L}$ berarti bahwa bilamana x mendekati tetapi pada sebelah kanan c, maka $f(x)$ dekat ke L. Hal ini serupa dengan $\lim_{x \to c^-} f(x) = \mathrm{L}$ berarti bahwa bilamana x mendekati tetapi pada sebelah kiri c, maka $f(x)$ adalah dekat L

Teorema

$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{L}$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = \mathrm{L}$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = \mathrm{L}$

Definisi

$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{L}$ berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian hingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, yakni :

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Contoh :

1. Buktikan $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

   Penyelesaian :

Analisis pendahuluan

Andaikan ε bilangan positif sebarang. Kita harus menghasilkan suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Pandang ketaksamaan ruas kanan

$$\begin{aligned}
|(3x - 7) - 5| < \varepsilon &\Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |3||x - 4| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Sekarang kita lihat bagaimana memilih δ, yakni $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Tentu saja sebarang δ yang lebih kecil akan memenuhi.

Bukti resmi

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Maka $0 < |x - 4| < \delta$ sehingga

$$
\begin{aligned}
|(3x - 7) - 5| &= |3x - 12| \\
&= |3(x - 4)| \\
&= 3\,|x - 4| \\
&< 3\delta \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

2. Buktikan $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

Penyelesaian :

Analisis pendahuluan

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon$$

Pandang ketaksamaan ruas kanan

$$\left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(2x + 1) - 5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2\,(x - 2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2||x - 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Bukti Resmi

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Maka $0 < |x - 2| < \delta$ sehingga

$$\left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| = \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5\right|$$

$$= |(2x + 1) - 5|$$

$$= |2\,(x - 2)|$$

$$= 2|x - 2|$$

$$< 2\delta$$

$$= \varepsilon$$

Terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

3. Buktikan $\lim_{x \to c} (mx + b) = \mathrm{mc} + \mathrm{b}$

Penyelesaian :

Analisis Pendahuluan

$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon$

Pandang ketaksamaan ruas kanan

$$
\begin{aligned}
|(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon &\Leftrightarrow |mx - mc| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |m(x - c)| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |m||(x - c)| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |(x - c)| < \frac{\varepsilon}{|m|}
\end{aligned}
$$

Bukti Resmi

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$

Maka $0 < |x - c| < \delta$ sehingga

$$\begin{aligned} |(mx + b) - (mc + b)| &= |mx - mc| \\ &= |m(x - c)| \\ &= |m||(x - c)| \\ &< |m|\, \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\lim_{x \to c} (mx + b) = \text{mc} + \text{b}$

4. Buktikan $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 + x - 5) = 7$

Analisis Pendahuluan

$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(x^2 + x - 5) - 7| < \varepsilon$

Pandang ketaksamaan ruas kanan

$$|(x^2 + x - 5) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 + x - 12| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |x + 4||x - 3| < \varepsilon$$

karena faktor yang kedua $|x - 3|$dapat di buat sekecil mungkin dan $|x + 4|$mendekati 7. Kita cari batas atas dari faktor $|x + 4|$.

untuk melakukan ini kita sepakati $\delta \leq 1$ maka $|x - 3| < \delta$ sehingga $|x + 4| = |x - 3 + 7|$

$$\leq |x - 3| + 7 \qquad \text{(ketaksamaan segitiga)}$$
$$< 1 + 7$$
$$= 8$$

Bukti Resmi

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$

Pilih $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$

Maka $0 < |x - 3| < \delta$ sehingga

$$\begin{aligned}|(x^2 + x - 5) - 7| &= |x^2 + x - 12| \\ &= |x + 4||x - 3| \\ &< 8 . \frac{\varepsilon}{8} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + x - 5) = 7$

Latihan

1. Buktikan $\lim_{x \to 0} (2x - 1) = -1$
2. Buktikan $\lim_{x \to -21} (3x - 1) = -64$
3. Buktikan $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$
4. Buktikan $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - x}{x} = -1$
5. Buktikan $\lim_{x \to 1} \frac{14x^2 - 20x + 6}{x - 1} = 8$